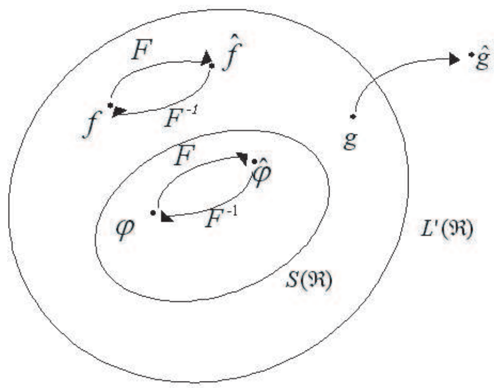
Clase 18: (Continuación)

Peter Hummelgens

12 de diciembre de 2006

1. Transformación de Fourier $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Luego de la clase anterior tenemos la situación siguiente:



Los $g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{g} \notin L^1(\mathbb{R})$ <u>no tienen</u> (por ahora) antitransformada y además no es claro si la TF de $\hat{g}$ existe (en algún sentido). Observe que en la figura $\hat{f}, \hat{\varphi}$ tienen nuevamente TF $\widehat{(\hat{f})}$, $\widehat{(\hat{\varphi})}$, etc. La situación con g de la figura es un <u>defecto</u> de la teoría desarrollado hasta ahora. Queremos tener un espacio de distribuciones en el cual podemos tomar <u>alegremente</u> TF y TF repetidas y anti TF <u>sin salir de este espacio</u>. Sabemos de la TL cómo importante es para las aplicaciones tener siempre una antitransformada.

El nuevo espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donde reina la alegría que acabamos de mencionar <u>debe contener el espacio $L^1(\mathbb{R})$</u>. Procedemos ahora a la definición de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Observemos que evidentemente $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, de modo que cada funcional lineal $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ define por restricción a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ un funcional lineal $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$, es decir una distribución. Definimos ahora $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ como el espacio vectorial de las $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ que son extendibles a funcionales lineales $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$. Así $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es un espacio de distribuciones especiales (extendibles a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). El espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ llamamos el espacio de las distribuciones atemperadas (el adjetivo "atemperadas" se explicará más adelante).

Veamos ahora algunos ejemplos de distribuciones atemperadas:

(a) $L^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ya que cada $f \in L^1(\mathbb{R})$ (distribución regular) es extendible a el funcional

$$< f, \varphi >:= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \tag{1}$$

donde ahora φ pertenece al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \supset \mathcal{D}(\mathbb{R})$. La integral converge seguramente porque $f \in L^1(\mathbb{R})$ y además cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ decrece a 0 para $|x| \to \infty$ más rápidamente que cualquier exponente de $1/|x|$.

(b) Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ de crecimiento lento (o atemperada), es decir, para ciertas constantes $A, k \geq 0$ se tiene

$$|f(x)| \leq A|x|^k; \ \text{ para } \ |x| \to \infty. \tag{2}$$

Para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenemos para cierta constante $B \geq 0$ que $|\varphi(x)| \leq \frac{B}{|x|^{k+2}}$ para $|x| \to \infty$, por lo tanto $|f(x)\varphi(x)| \leq \dfrac{AB}{|x|^2}$ para $|x| \to \infty \Longrightarrow f\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, de modo que la integral en (1) converge absolutamente para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Por lo tanto para una función $f(x)$ de crecimiento lento, la misma fórmula (1) define f como distribución atemperada. En particular cualquier función acotada define (o es) una distribución atemperada. En particular cualquier función constante es una distribución atemperada.

(c) Cualquier distribución de soporte compacto es una distribución atemperada, ya que para una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal, $< T, \varphi >$ está bien definido para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (es más: para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$).

(d) $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \Longrightarrow T^{(n)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$; $\quad n = 0, 1, 2, \cdots$ porque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \varphi^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, luego si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ podemos definir

$$< T^n, \varphi >:= (-1)^n < T, \varphi^{(n)} >, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

y $T^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(e) Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $P(x)$ es un polinomio, entonces $\varphi P \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Luego, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ podemos definir $P(x)T(x)$ por

$$< P(x)T(x), \varphi(x) >:=< T(x), P(x)\varphi(x) >, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \tag{4}$$

y entonces $PT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(f) Sea $f(x) = e^x \operatorname{sen}(e^x)$; $-\infty < x < \infty$. Es claro que $f(x)$ no es una función atemperada. Pero $f(x) = \frac{d}{dx}(\cos(e^x))$ donde $\cos(e^x)$ es acotada, por lo tanto define una distribución atemperada. Por (d) entonces $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Es claro que e^x no pertenece a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ debido a su crecimiento exponencial para $x \to \infty$. También $h(-x)e^{-x}$ no pertenece a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ debido a su crecimiento exponencial para $x \to -\infty$. Mencionamos el resultado siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sea } T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).\text{ Entonces existen un entero } u \geq 0 \text{ y } f \in C(\mathbb{R}) \text{ atemperada} \\ \text{tal que } T = f_{gen}^{(n)}.\end{array}\right\} \tag{5}$$

Este resultado caracteriza los elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ como funciones atemperadas o derivadas distribucionales de funciones atemperadas. De aquí que se llama a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ el espacio de las distribuciones atemperadas.

Podemos ahora definir la TF de distribuciones atemperadas. En (g) de la Clase 17 vimos que para $f \in L^1(\mathbb{R})$ tenemos

$$< \hat{f}, \varphi >=< f, \hat{\varphi} >, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{6}$$

Esto nos lleva a definir los TF $\hat{T}$ de una $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ por

$$< \hat{T}, \varphi >:=< T, \hat{\varphi} >, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{7}$$

donde ahora el corchete $< T, \hat{\varphi} >$ es bien definido ya que sabemos (Clase 17) que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\Longrightarrow \varphi \in \hat{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$. El funcional $\hat{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por (6) <u>es lineal</u> ya que para $\varphi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\begin{aligned} < \hat{T}, \varphi + \psi > &\overset{(7)}{=} < T, \widehat{\varphi + \psi} >=< T, \hat{\varphi} + \hat{\psi} >=< T, \hat{\varphi} > + < T, \hat{\psi} > \\ &\overset{(7)}{=} < \hat{T}, \varphi > + < \hat{T}, \psi > \quad \text{y} \\ < \hat{T}, \lambda\varphi > &\overset{(7)}{=} < T, \widehat{\lambda\varphi} >=< T, \lambda\hat{\varphi} >= \lambda < T, \hat{\varphi} > \overset{(\mathbf{??})}{=} \lambda < \hat{T}, \varphi > . \end{aligned}$$

Así vemos que $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$: la TF no nos lleva fuera de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Además (6) hace ver que la TF de una $f \in L^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (dada por $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e\omega x} f(x)dx$) coincide con su TF definida por (7) como elemento $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Aunque posiblemente $\mathcal{F} \notin L^1(\mathbb{R})$, si tenemos $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1. *$\delta_a^{(n)}$ es de soporte compacto $\overset{(c)}{\Longrightarrow}$ $\delta_a^{(n)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y tenemos*

$$\begin{aligned}
< \widehat{\delta_a^{(n)}}, \varphi > &\overset{(7)}{=} < \delta_a^{(n)}(\omega), \hat{\varphi}(\omega) >= (-1)^n < \delta_a(\omega), \hat{\varphi}^{(n)}(\omega) >= \textit{((8) de la Clase 17)} \\
&= (-1)^n < \delta_a(\omega), -\widehat{(ix)^n\varphi}(x)(\omega) > \overset{(7)}{=} (-1)^n < \hat{\delta}_a(\omega), (-i\omega)^n\varphi(\omega) > \\
&= < \hat{\delta}_a(\omega), (i\omega)^n\varphi(\omega) >=< (i\omega)^n\hat{\delta}_a(\omega), \varphi(\omega) > \quad \textit{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),
\end{aligned}$$

de modo que

$$\delta_a^{(n)}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^n\hat{\delta}_a(\omega) = \frac{1}{2\pi}(i\omega)^n e^{-ia\omega}; \quad n = 0, 1, 2, \cdots (a \in \mathbb{R}), \tag{8}$$

ya que en la Clase 17 encontramos que $\delta_a(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1}{2\pi}e^{-ia\omega}$, lo que también podemos obtener de (7):

$$\begin{aligned}
< \hat{\delta}_a, \varphi > \overset{(7)}{=} < \delta_a(\omega), \hat{\varphi}(\omega) > &= \hat{\varphi}(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}\varphi(x)dx = \frac{1}{2\pi} < e^{-iax}, \varphi(x) > \\
&= \frac{1}{2\pi} < e^{-ia\omega}, \varphi(\omega) > \quad \textit{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

2. Reglas operacionales.

1. $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es un operador lineal, es decir,

$$f, g \in \mathbb{S}'(\mathbb{R}), \quad \lambda \in (\mathbb{C}) \quad \Longrightarrow \quad f + g \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f} + \hat{g}, \quad \lambda f \xrightarrow{F} \lambda\hat{f}$$

   Esto es evidente

2. $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R})$ (como ya observamos en la clase sobre la convolución) y

$$f(x) * g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega). \tag{9}$$

Demostración :

$$2\pi f(x) * g(x) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\zeta)g(\zeta)d\zeta\right)dx$$
$$\overset{Fubini}{=} \quad \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\omega(x-\zeta)} f(x-\zeta)g(\zeta)e^{-i\omega\zeta}dxd\zeta = (2\pi)^2\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega),$$

de donde se sigue (9). □

Mencionamos sin demostración:

$$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ de soporte compacto, } g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ arbitrario} \implies \text{(9) es válido} \tag{10}$$

donde observamos que f de soporte compacto, $\implies \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ (ver la Clase 17), de modo que en (9) el producto $\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ es bien definido como producto de una función C^∞ con una distribución. Otras situaciones donde (9) es válido presentaremos más adelante.

3.
$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies f_{gen}^{(n)}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^n\hat{f}(\omega); \quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Demostración : $f_{gen}^{(n)}(x) = \delta^{(n)}(x) * f(x) \xrightarrow[2.]{\mathcal{F}} 2\pi(i\omega)^n\frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega) = (i\omega)^n\hat{f}(\omega).$ □

4.
$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies x^n f(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^n\hat{f}_{gen}^{(n)}(\omega); \quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Demostración :

$$\begin{aligned} < \hat{f}_{gen}^{(n)}, \varphi > &= (-1)^n < \hat{f}(\omega), \varphi^{(n)}(\omega) > \overset{(7)}{=} (-1)^n < f(\omega), \widehat{\varphi^{(n)}}(\omega) > \\ &\overset{(3)}{=} (-1)^n < f(\omega), (\omega)^n\hat{\varphi}(\omega) >= (-1)^n < (i\omega)^n f(\omega), \hat{\varphi}(\omega) > \\ &= < (-i\omega)^n f(\omega), \hat{\varphi}(\omega) > \overset{(7)}{=} < (-\widehat{ix)^n f}(x)(\omega), \varphi(\omega) > \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\implies (-ix)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}_{gen}^{(n)}(\omega)$$

equivalente con el resultado deseado. □

5.
$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies f(x-a) \xrightarrow{F} e^{ia\omega}\hat{f}(\omega); \quad a \in \mathbb{R} \text{ (traslación en } x).$$

Demostración : $f(x-a) = \delta_a(x) * f(x) \xrightarrow[2.]{\mathcal{F}} 2\pi \frac{1}{2\pi} e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$. $\square$

6.
$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies e^{iax}f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega - a); \;\; a \in \mathbb{R} \;\; \text{(traslación } \omega).$$

Demostración :

$$\begin{aligned} < \hat{f}(\omega - a), \varphi(\omega) > &= < \hat{f}(\omega), \varphi(\omega + a) > \overset{(7)}{=} < f(\omega), \widehat{\varphi(x+a)}(\omega) > \\ &\overset{5.}{=} < f(\omega), e^{ia\omega}\hat{\varphi}(\omega) > = < e^{ia\omega}f(\omega), \hat{\varphi}(\omega) > \\ &\overset{(7)}{=} < \widehat{e^{iax}f(x)}(\omega), \varphi(\omega) > \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Longrightarrow e^{iax}f(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega - a)$. $\square$

7. Para $f \in L^1(\mathbb{R})$, $0 \neq a \in \mathbb{R}$ tenemos

$$< f(ax), \varphi(x) > = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\varphi(x)dx \overset{t=ax}{=} \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t}{a}\right)dt = < f(t), \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{t}{a}\right) >$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, lo que nos lleva a definir

$$< f(ax), \varphi(x) > := < f(x), \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right) > . \tag{11}$$

Tenemos ahora

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right); \;\; 0 \neq a \in \mathbb{R}$$

Demostración : Primero tenemos

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \hat{\varphi}(ax) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-1\omega x}\varphi(ax)dx \overset{t=ax}{=} \frac{1}{2\pi|a|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega}{t}t}\varphi(t)dt = \frac{1}{|a|}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{a}\right),$$

luego

$$\begin{aligned} < \widehat{f(ax)}(\omega), \varphi(\omega) > &\overset{(7)}{=} < f(a\omega), \hat{\varphi(\omega)} > \overset{(11)}{=} < f(\omega), \frac{1}{|a|}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{a}\right) > \\ &= < f(\omega), \widehat{\varphi(ax)}(\omega) > \overset{(7)}{=} < \hat{f}(\omega), \varphi(a\omega) > \\ &= \frac{1}{|a|} < \hat{f}(\omega), |a|\varphi\left(\frac{\omega}{1/a}\right) > = \frac{1}{|a|} < \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \varphi(\omega) > \\ &= < \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \varphi(\omega) > \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\Longrightarrow f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

De este resultado en combinación con (5) se obtiene

$$f \in \mathcal{S}''(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad f(ax+b) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}e^{i\frac{b}{a}\omega} \cdot \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right); \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$\square$